Structures of Automata and Automorphism Groups(オートマトンの構造と自己同形部)

著者	伊藤 正美
号	369
発行年	1977
URL	http://hdl.handle.net/10097/11318

氏　　　　　名	伊(い) 藤(とう) 正(まさ) 美(み)
授　与　学　位	工　学　博　士
学位授与年月日	昭和53年2月1日
学位授与の根拠法規	学位規則第5条第2項
最　終　学　歴	昭和42年3月 京都大学大学院理学研究科数学専攻修士課程修了
学位論文題目	**Structures of Automata and Automorphism Groups（オートマトンの構造と自己同形群）**
論文審査委員	東北大学教授　野口　正一　東北大学教授　斎藤　伸自 東北大学教授　木村　正行　東北大学助教授　那須　正和

論文内容要旨

本論文では，オートマトンの自己同形群の研究に於いて，従来，等閑されてきた部分がとりあつかわれる。すなわち，オートマトンの自己同形写像を具体的にもとめる方法と，逆に，与えられた有限群に対して，それと同形な自己同形群をもつオートマトンの構造を決定するという問題が中心である。

論文は，六つの章より構成される。

1　序　　論

この章においては，本研究の背景と目的が述べられる。

2. オートマトンの自己同形群の決定

この章では，まず1入力オートマトンを考察し，その任意の自己同形写像がα型，β型，γ型とよばれる三つの基本的な自己同形写像の有限積として表されることを示す。この三つの型の自己同形写像はオートマトンの状態遷移図の視察により簡単に得られるので，1入力オートマトンに関しては，その自己同形群を直接的に構成することが出来る。さらに，1入力オートマトンの自己同形群の可換性の判定法も与える。最後に，多入力オートマトンの自己同形群の構成法について述べる。

3. 強連結オートマトンの自己同形群

この章では，群行列型オートマトンという新しい種類のオートマトンを導入することによって，与えられた有限群に同形な自己同形群をもつ強連結オートマトンの構造を決定する。さらに，この手法を用いて，強連結オートマトンの自己同形群に関する従来の結果を拡張する。

まず，3・1節においては，Fleckによって与えられた，強連結および完全オートマトンの自己同形群に関するいくつかの結果が紹介される。また，新らたに簡素オートマトンの定義が与えられる。

つぎに，3・2節では，与えられた有限群Gに対して，乗法および加法を伴なった集合$G^0 = G \cup \{o\}$ $(O \notin G)$が定義される。さらに，任意の正整数nに対して，G^0の要素を成分とし一成分のみがGの元であるn次ベクトルの集合$\hat{G}_n$，および各行に対し一成分のみがGの元であるn×n行列の集合$\tilde{G}_n$が定義される。このとき，$\forall \hat{f} \in \hat{G}_n$，$\forall X$，$Y \in \tilde{G}_n$に対して，$\hat{f}X \in \hat{G}_n$，$XY \in \tilde{G}_n$となる。

これらの事実をもとに，G上のn次群行列型オートマトンが定義される。

〔定義〕Gを有限群，nを正整数とする。つぎのようなオートマトン$A = (\hat{G}_n, \Sigma, M_\psi)$を，G上のn次群行列型オートマトン，あるいは略して（n，G）－オートマトンとよぶ：
(1) $\hat{G}_n$は状態集合である。(2) Σは入力集合である。(3) M_ψは状態遷移関数であり，つぎのように定義される。$M_\psi(\hat{f}, \sigma) = \hat{f}\psi(\sigma)$ $(\hat{f} \in \hat{G}_n, \sigma \in \Sigma)$。ここで$\psi$は$\Sigma$から$\tilde{G}_n$の中への写像である。

このタイプのオートマトンについて種々の性質が知られているが，つぎのことは基本的である。

〔定理〕Aを（n，G）－オートマトンとする。このとき，Aの自己同形群G(A)はGを埋め込む。

特に，G≈G(A)なる場合が重要である。ただし，≈は群の同形をあらわす。

〔定義〕強連結（n，G）－オートマトンAは，G≈G(A)なるとき，正規であるとよばれる。

ここで，群行列型オートマトンの強連結性および正規性に関しいくつかの結果が得られる。特

に，$n \doteq 2$ の場合が詳しく論じられる。

3・3節では，前節の結果を利用してつぎの定理が証明される。

〔定理〕$A=(S, \Sigma, M)$ を $|S|=n|G(A)|$ なる強連結オートマトンとする。ただし，$|K|$ は集合Kの濃度をあらわす。つぎにGを $G \approx G(A)$ なる群とする。このとき，Aに同形な正規（n，G）－ オートマンが存在する。すなわち，Aは正規（n，G）－オートマトンで表現される。

この結果は重要である。なぜなら，逆に，Aを正規（n，G）－ オートマトンとするとき，$G \approx G(A)$ となり，したがって，与えられた群Gに同形な自己同形群をもつオートマトンの構造を調べるためには，正規群行列型オートマトンに限定してよいことになるからである。

3・4節に於いては，二つの正規群行列型オートマトンが同形であるかどうかの議論のために正規系の概念および，二つの正規系の間の同値性の概念が与えられる。これによって，二つの簡素正規群行列型オートマトンの同形性の必要十分条件が与えられる。ここで，オートマトンの同形性をみる場合，簡素オートマトンに限定してよいことに注意しておく。

3・5節では，我々の開拓した方法を強連結オートマトンAの特性半群C(A)および入力集合の調査に応用する。ひとつはよく知られた結果の新しい証明である。

〔定理〕Aを強連結オートマトンとする。このとき，C(A)が群となるための必要十分条件は，Aが置換オートマトンになることである。

次の結果は，入力集合に関するものである。

〔定理〕$A=(S, \Sigma, M)$ を $G(A) \approx G$ なる強連結オートマトンとする。このとき，$|S||\Sigma| \geq I(G)|G|$ となる。ただし，$I(G)=\min\{|H| ; H \subset G, [H]=G\}$ （〔K〕は集合Kによって生成される群）。

この結果，$G(A) \approx G$，$|\Sigma| < I(G)/n$ （ただし，$n=|S|/|G(A)|$ ）なる強連結オートマトンは存在しないことがわかる。したがってつぎのことが問題となる。

与えられた有限群に同形な自己同形群をもつ強連結オートマトンで，出来るだけ入力記号数のすくないオートマトンが存在するか？

〔定理〕Gを有限群とする。このとき，$G \approx G(A)$ なる強連結オートマトン $A=(S, \Sigma, M)$ で $|\Sigma| \leq 2$ なるものが存在する。

3・6節では，群行列型オートマトンの直積とその自己同形群について調べる。このため，$\forall X \in \widetilde{H}_n$，$\forall Y \in \widetilde{K}_m$ （H，Kは群Gの部分群）に対して，XとYのKronecker 積 $X \otimes Y \in \widetilde{G}_{nm}$ が定義される。また，$A=(\hat{H}_n, \Sigma, M_\psi)$，$B=(\hat{K}_m, \Sigma, M_\pi)$ に対して，（nm，G）－ オートマトン $A \otimes B=(\hat{G}_{nm}, \Sigma, M_{\psi \otimes \pi})$ （$\forall \sigma \in \Sigma, (\psi \otimes \pi)(\sigma)=\psi(\sigma) \otimes \pi(\sigma)$ ）が定義され，これをAとBのKronecker 積とよぶ。

〔定理〕 $G=X\times K$とする。またA，Bをそれぞれ入力集合を同じくする（n，H）－，（m，K）－オートマトンとする。このとき，$A\otimes B$は$A\times B$に同形である。ただし，$A\times B$はAとBの直積である。

3・7節では，群行列型オートマトンの商オートマトンについて考える。今，ξを群G上で定義された準同形とする。このとき，（n，G）－オートマトンAに対して，（n，ξ(G)）－オートマトン$A\xi$が定義され，つぎの結果がなりたつ。

〔定理〕 Aを正規（n，G）－オートマトンとし，ξをG上で定義された準同形とする。このとき，A_ξは商オートマトン$A/Ker(\xi)$に同形である。ただし，ここでGとG(A)は同一視されており，さらにKer(ξ)は準同形ξの核である。

上記および前節の結果から，つぎの二つの定理，一つはFleck の結果の延長，またもう一つはFleckの結果の別証明，が得られる。

〔定理〕 A＝（S，Σ，M）を$|S|=2|G(A)|$なる強連結オートマトン，さらにHをG(A)の正規部分群とする。このとき，もしAが置換オートマトンでなければ$G(A)/H\approx G$（A／Hがなりたつ。

〔定理〕 A＝（S，Σ，M）を$|S|=|G(A)|$なる強連結オートマトン，さらに$G(A)=H\times K$とする。このとき，Aは$A/H\times A/K$に同形となる。

4. 次数が素である群行列型オートマトン

この章では，次数が素であるような群行列型オートマトンがとりあつかわれる。まず，この種のオートマトンが正規であるための必要十分条件が与えられ，さらにその結果が，商オートマトンの自己同形群および直積オートマトンの自己同形群の研究に用いられる。

まず，4・1節に於いては，オートマトンの正規性の必要十分条件をみちびくための準備がなされる。

4・2節では，前節の結果を利用して，次数が素であるような群行列型オートマトンの正規性が論じられる。

〔定理〕 $A=(\hat{G}_n, \Sigma, M_\psi)$を強連結（n，G）－オートマトンとする。ただし，ここでnは素数である。このときAは，次の二つの条件がなりたつとき，そしてそのときにかぎって正規でない：(1) Aは置換オートマトンである。 (2) $X=(x_{pg})$，$Y=(y_{pg})$を$\psi(\Sigma^*)$（$=\psi(\Sigma)^*$）の二元とする。もし $\exists_{i,j}$ $(1\leq i, j\leq n)$，$x_{ij}=y_{ij}\neq o$ ならば，$X=Y$がなりたつ。ただし，K^*は集合Kにより生成される単位半群である。

4・3節では，前節の結果が，商オートマトンの自己同形群の研究に利用される。たとえば3・7の定理をつぎのようなかたちで一般化することが出来る。

〔定理〕 $A = (S, \Sigma, M)$ を $|S| = n|G(A)|$ なる強連結オートマトン，さらにHをG(A)の正規部分群とする。ただし，ここでnは素数である。このとき，もしAが置換オートマトンでなければ $G(A)/H \approx G(A/H)$ がなりたつ。

4・4節では，直積オートマトンとその自己同形群の関係がのべられる。その証明には，3・6および4・2の結果が利用される。

〔定理〕 $A = (S, \Sigma, M)$ ，$B = (T, \Sigma, N)$ をそれぞれ $|S| = |G(A)|$ ，$|T| = n|G(B)|$ なる強関連オートマトンとする。ただし，ここでnは素数である。このとき，もしも下記の条件のいずれかがなりたつならば $G(A \times B) \approx G(A) \times G(B)$ となる：(1) Bは置換オートマトンでない。 (2) $|G(A)|$ と $(n-1)!$ は互に素，さらに，$|G(A)|$ と $|G(B)|$ も互に素。

5. 一般群行列型オートマトン

前章まででは，強連結オートマトンを正規群行列型オートマトンで表現する問題をとりあつかった。この章では，結果をより一般化し，必ずしも強連結でない一般のオートマトンをその自己同形群と関連づけて表現する問題をとりあつかう。

5・1節では，一般群行列型オートマトンの定義が与えられる。まず，Gを有限群とする。さらに $H^{(n)} = \{H_1, H_2, \cdots, H_n\}$ を分離条件 $\bigcap_{g \in G} \bigcap_{i=1}^{n} gH_ig^{-1} = \{e\}$（eはGの単位元）をみたす，Gの部分集合からなる集合族とする。このとき，H_i $(1 \leq i \leq n)$ によるGの剰余類を成分とするn次ベクトルのクラス $\hat{G}(H^{(n)})$ ，$n \times n$ 行列のクラス $\widetilde{G}(H^{(n)})$ が，乗法演算とともに定義され，$\forall \hat{f} \in \hat{G}(H^{(n)})$ ，$\forall X, Y \in \widetilde{G}(H^{(n)})$ に対して，$\hat{f}X \in G(H^{(n)})$，$XY \in \widetilde{G}(H^{(n)})$ となる。さらに，群行列型オートマトンの場合と同様 $(H^{(n)}, G)$ 上の群行列型オートマトン，略して $(H^{(n)}, G)$ −オートマトン $A = (\hat{G}(H^{(n)}), \Sigma, M_\psi)$ が定義される。

5・2節に於いては，一般群行列型オートマトンに関するいくつかの性質がのべられる。次の結果が基本的である。

〔定理〕 Aを $(H^{(n)}, G)$ − オートマトンとする。このとき，GはG(A)に埋め込まれる。

上記結果に関連して，正規性の概念が与えられる。

〔定義〕 $(H^{(n)}, G)$ − オートマトンAは $G \approx G(A)$ なるとき正規であるとよばれる。

5・3節では，この章の中心的結果，すなわち，一般のオートマトンの正規群行列型オートマトンによる表現がのべられる。

〔定理〕 Aをオートマトンとする。また，GをG(A)に同形な群とする。このとき，分離条件をみたすGの部分群の族 $H^{(n)} = \{H_1, H_2, \cdots, H_n\}$ が存在し，Aはある正規 $(H^{(n)}, G)$ −オートマトンに同形となる。

5・4節では，一般群行列型オートマトンの正規性について，特に可遷オートマトン，すなわ

ち一次の場合が詳しく論ぜられる。たとえば，次の結果がなりたつ。

〔定理〕Gを単純群とする。このとき，任意の正規（$H^{(1)}$，G)－ オートマトンは，必然的に（1，G)－ オートマトンとなる。

6. 結　　論

この章では，本論文の総括を行ない，第二章から第五章までの結論をまとめるとともに，残された問題点を指摘する。

審 査 結 果 の 要 旨

情報処理システムの数学的モデルの一つである有限オートマトンの研究は，従来より活発に行われているが，代数理論の立場からの研究は必ずしも十分に行われていない。

著者は，有限オートマトン理論の中でも重要な課題であるオートマトンの構造について，オートマトンの自己同形群に着目して研究を行い，従来より得られている結果を包含する新しいオートマトンの代数的構造理論を与えた。

本論文は，これらの成果をまとめたもので全文6章よりなる。

第1章は序論であり，本研究の背景と目的を述べたものである。

第2章ではまず，1入力オートマトンの自己同形写像を考察し，すべての自己同形写像が3つの基本同形写像の積として表現されることを示し，これを用いて自己同形群を構成する方法を与えている。さらにこの方法を用いて多入力オートマトンの自己同形群を求める方法を与えている。

第3章では，群行列型オートマトン，正規群行列型オートマトンの概念を新たに導入し，任意の強連結オートマトンはその自己同形群に対応する正規群行列型オートマトンによって表現できることを示して，強連結オートマトンの構造とその自己同形群の関係を明らかにしている。さらにこの結果を用いて，強連結オートマトンの入力数，自己同形群の位数及びその生成元の個数の間の関係を求め，与えられた有限群に同形な自己同形群をもつ強連結オートマトンは入力数2以下で実現できるという重要な結果を導いている。

第4章では群の位数が素数である群行列型オートマトンの性質を詳細に調べている。まず群行列型オートマトンが正規であるための必要十分条件を与え，この結果を用いて商オートマトン，および直積オートマトンの自己同形群の性質を与えている。

第5章では今迄の考察を強連結でない一般のオートマトンに拡張し，一般群行列型オートマトンの概念を導入して，一般のオートマトンの構造とその自己同形群の関係を論じ幾つかの興味ある結果を与えている。

第6章は結論である。

以上要するに本論文は有限オートマトンの構造とその自己同形群の関係を統一的に研究し，従来の結果を包含する新しいオートマトンの代数的構造理論を構成したもので，情報工学に寄与するところが少なくない。

よって，本論文は工学博士の学位論文として合格と認める。